$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t \exp_\tau\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-\tau-\xi)\right\}F_n^o(\xi)d\xi\right]\sin\frac{\pi n}{l}x+ \tag{26}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp_\tau\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-\tau)\right\}\Phi_n^o(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}\exp_\tau\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-\tau-\xi)\right\}\Phi_n^o(\xi)d\xi\right]\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\Phi_n^o(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\quad F_n^o(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Доведення. Як випливає із залежностей (8), (16) і умови (25) теореми, коефіцієнти Фур'є $F_n(t)$ і $\Phi_n(t)$ мають такий вигляд: $\Phi_n^o(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$, $F_n^o(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$.

Скористаємось умовами на похідні функцій $f(\xi,t)$, $\varphi(\xi,t)$ і проінтегруємо по частинах

$$\Phi_n^o(t)=\frac{2}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}\varphi(\xi,t)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=l}+\frac{l}{\pi n}\int_0^l\frac{\partial\varphi(\xi,t)}{\partial\xi}\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right]=\frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l\frac{\partial\varphi(\xi,t)}{\partial\xi}\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Повторивши інтегрування ще раз, отримаємо $\Phi_n^o(t)=-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l\frac{d^2\varphi(\xi,t)}{d\xi^2}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$.

Проробивши процедуру інтегрування $(2k+1)$ разів, запишемо $\Phi_n^o(t)=\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^{2k+1}\int_0^l\frac{d^{2k+1}\varphi(\xi,t)}{d\xi^{2k+1}}\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$.

Звідси $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{2(k-1)}\left|\Phi_n(s)\right|=0$.

Аналогічно доводиться виконання умови $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|F_n(t)\right|=0$. Таким чином, виконуються умови теореми 3 і розв'язок першої крайової задачі (1)–(3) має вигляд (26).

1. *Тихонов А., Самарский А.* Уравнения математической физики. – М., 1966; 2. *Владимиров В.* Уравнения математической физики. – М., 1988; 3. *Эльсгольц Л., Норкин С.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971; 4. *Ткач Б.* Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 10; 5. *Хусаінов Д., Коварж І.* Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 2.; 6. *Будак Б., Фомін С.* Кратные интегралы и ряды. – М., 1967.

Дослідження частково підтримані грантом NSF INT-0203702/.

Надійшла до редколегії 3.12.2005

УДК 517.9

Ю. Шушарін, ст. виклад.,
О. Лавренюк, асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЛАНЦЮГА МАРКОВА

Розглядається система різницевих рівнянь, коефіцієнти якої залежать від двох послідовних значень ланцюга Маркова. Отримано моментні рівняння, виведено необхідні й достатні умови стійкості розв'язків у середньому квадратичному. Для однорідної системи введено функції Ляпунова й отримано умови стійкості в термінах функцій Ляпунова.

We have analysed a system of differential equations the coefficients of which depend on two consequent values of Markov's chain. We've received momentous equations and determined the necessary and sufficient conditions of the stability of solutions.

1. Розглядається система m лінійних різницевих рівнянь

$$X_{k+1}=A(\xi_{k+1}\xi_k)X_k+B(\xi_{k+1}\xi_k)\qquad(k=0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

де ξ_k – скінченнозначний ланцюг Маркова, який приймає значення $\theta_1,\ldots,\theta_n$ з імовірностями

$$p_S(k)=P\{\xi_k=\theta_s\}\qquad(s=1,\ldots,n),$$

що задовольняють систему різницевих рівнянь

$$p_j(k+1)=\sum_{s=1}^{n}\pi_{js}p_s(k)\qquad(j=1,\ldots,n;k=0,1,2,\ldots)\ . \tag{2}$$

Припускаємо виконання умов [1]

$$\pi_{js}\ge 0,\quad \sum_{j=1}^{n}\pi_{js}=1\quad(s=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n).$$

Введемо позначення

$$A_{js} = A(\theta_j, \theta_s), \quad B_{js} = B(\theta_j, \theta_s) \quad (j, s = 1,...,n) \ . \tag{3}$$

Густину ймовірностей випадкового розв'язку системи різницевих рівнянь (1) можна зобразити у вигляді (2)

$$f(k, X, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f_j(k, X)\delta(\xi - \theta_j),$$

де $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака. Часткові густини $f_j(k, X)$ задовольняють систему функціональних рівнянь

$$f_j(k+1, X) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} f_s(k, A_{js}^{-1}(X - B_{js}))\left|\det A_{js}^{-1}\right| \ . \tag{4}$$

Для моментів першого порядку отримаємо систему векторних неоднорідних рівнянь

$$M_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js}(A_{js}M_s(k) + p_s(k)B_{js}(k)) \quad (j = 1,...,n).$$

Для початкових моментів другого порядку маємо систему матричних рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js}(A_{js}D_s(k)A_{js}^* + B_{js}(k)M_s^*(k)A_{js}^* + A_{js}M_s(k)B_{js}^*(k) + p_s(k)B_{js}(k)B_{js}^*(k)) \ . \tag{5}$$

Тут позначено [2]

$$M_j(k) = \left\langle X_k \middle| \Im_k = \theta_j \right\rangle = \int\limits_{E_m} \ldots \int X f_j(k, X)dX; \quad dX = dx_1,...,dx_m$$

$$D_j(k) = \left\langle X_k X_k^* \middle| \Im_k = \theta_j \right\rangle = \int\limits_{E_m} \ldots \int XX^* f_j(k, X)dX; \quad (j = 1,...,n).$$

Для однорідної системи рівнянь (1) система рівнянь (5) набуває вигляду

$$D_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} A_{js} D_s(k) A_{js}^* \quad (j = 1,...,n) \ . \tag{6}$$

Оскільки матриця других моментів $D(k) = \left\langle X_k X_k^* \right\rangle \quad (k = 0,1,2,...)$ виражається через невід'ємні симетричні матриці $D_j(k) \quad (j = 1,...,n) \ \ D(k) = \sum_{j=1}^{n} D_j(k),$ то це приводить до такої теореми.

Теорема 1. Для того, щоб нульові розв'язки однорідної системи рівнянь з випадковими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = A(\xi_{k+1}, \xi_k) X_k \tag{7}$$

були стійкими в середньому квадратичному, необхідно й достатньо, щоб розв'язок системи різницевих рівнянь (6) був стійким.

2. Для дослідження стійкості розв'язків системи однорідних рівнянь (7) введемо стохастичні функції Ляпунова, які визначаються формулами

$$v_s(k, X) = \sum_{j=k}^{\infty} \left\langle X_j^* H(\xi_j) X_j \middle| X_k = X, \xi_k = \theta_s \right\rangle. \tag{8}$$

Тут $H(\xi_j)$ – симетрична матриця, що приймає n значень $H_s = H(\theta_s) \quad (s = 1,...,n).$

Функції $v_s(k, X) \quad (s = 1,...,n)$ є квадратичними формами від X.

Нехай

$$v_s(k, X) = X^* Q_s(k) X \quad (s = 1,...,n) \ . \tag{9}$$

З формул (8), (9) знаходимо систему рівнянь

$$v_s(k, X) = X^* H_s X + \sum_{j=1}^{n} \pi_{js} v_j(k+1, A(\xi_j, \xi_s) X) \ , \tag{10}$$

яку можна записати у вигляді

$$Q_s(k) = H_s + \sum_{j=1}^{n} \pi_{js} A_{js}^* Q_j(k+1) A_{js} \quad (s = 1,...,n) \ . \tag{11}$$

Теорема 2. Однорідна система рівнянь

$$Q_s(k) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{js} A_{js}^* Q_j(k+1) A_{js} \tag{12}$$

є спряженою до системи рівнянь (6).

Доведення. Використовуємо скалярний добуток *AoB* матриць $A = \|a_{ks}\|, \quad B = \|b_{ks}\|$, визначений за формулою [2] $A\text{o}B = \sum_{k,s} a_{ks} b_{ks}$, який задовольняє формулу $A\text{o}CBD = C^* A D^* \text{o} B.$

З формул (12), (6) знаходимо рівність

$$\sum_{j=1}^{n} D_j(k+1) o Q_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} A_{js} D_s(k) A_{js}^{*} o Q_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} D_s(k) o A_{js}^{*} Q_j(k+1) A_{js} =$$

$$\sum_{s=1}^{n} D_s(k) Q_s(k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

яка доводить теорему.

З теореми 2 випливають такі результати.

Теорема 3. Для того щоб нульові розв'язки системи різницевих рівнянь (6) були асимптотично стійкими при n→+∞, необхідно й достатньо, щоб нульові розв'язки системи різницевих рівнянь (12) були асимптотично стійкими при n→-∞.

Теорема 4. Якщо нульові розв'язки системи (12) асимптотично стійкі при n→-∞, то система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Q_s(k) = H_s + \sum_{j=1}^{n} \pi_{js} A_{js}^{*} Q_j A_{js} \tag{13}$$

при довільних матрицях $H_s \quad (s = 1, \ldots, n)$ має розв'язок $Q_s \quad (s = 1, \ldots, n)$.

Якщо $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$, то $Q_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$.

Доведення теореми випливає з того, що $Q_s = \lim\limits_{k \to -\infty} Q_s(k)$ для будь-якого розв'язку системи різницевих рівнянь (11) при k→-∞. Якщо $Q_j(0) = 0$, то із системи рівнянь (11) випливає, що $Q_s(k) > 0 \quad (k = -1, -2, -3, \ldots)$, і при цьому $Q_s(k) \ge H_s \ (k = -1, -2, -3, \ldots)$. Крім того, з формули (8) випливає, що при $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$ та $X_j \to 0 \quad (j = k, k+1, \ldots)$ квадратичні форми $v_s(k, X) \quad (s = 1, \ldots, n)$ будуть додатно-визначеними, а отже, $Q_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n).$

Теорема 5. Якщо система рівнянь (13) за деяких $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$ має розв'язок $Q_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$, то нульовий розв'язок системи різницевих рівнянь (6) асимптотично стійкий при n→+∞.

Доведення. З існування стохастичних функцій Ляпунова $v_s(X) = X^{*} Q_s X = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left\langle X_j^{*} H(\xi_j) X_j \,\middle|\, X_k = X, \xi_k = \theta_s \right\rangle$

випливає збіжність матричних рядів $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left\langle X_j^{*} X_j \,\middle|\, X_0 = X, \xi_0 = \theta_s \right\rangle = \sum\limits_{j=0}^{\infty} D(j),$

а звідси – співвідношення $\lim\limits_{j \to +\infty} D(j) = 0.$

Кінцевий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 6. Для того, щоб нульовий розв'язок системи різницевих рівнянь (7) був асимптотично стійким у середньому квадратичному, необхідно й достатньо, щоб система матричних рівнянь (13) за будь-яких $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$ мала розв'язок $Q_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$ або щоб при деяких матрицях $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$ система рівнянь (13) мала розв'язок $H_s > 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$.

Ця теорема дає обґрунтування застосуванню стохастичних функцій Ляпунова для дослідження стійкості розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

3. Розглянемо економічну задачу про обчислення прибутку при дослідженні системи різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами вигляду (7), коли коефіцієнти залежать від процесу Маркова. Нехай прибуток Y_k залежить від ξ_k, ξ_{k+1}:

$$y_{k+1} = y_k + C(\xi_{k+1}, \xi_k) \,. \tag{14}$$

Знайдемо різницеві рівняння для зміни математичного сподівання $m(k) = \langle y_k \rangle$ і другого початкового моменту $d(k) = \left\langle y^2{}_k \right\rangle$. Із системи рівнянь (15) знаходимо систему моментних розв'язків

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} p_s(k) \qquad (s = 1, \ldots, n); \quad m_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} m_s(k) + \pi_{js} p_s c_{js};$$

$$d_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js} (d_s(k) + 2 c_{js} m_s(k) + p_s(k)(c_{js})^2). \tag{15}$$

З розв'язку системи рівнянь (15) знаходимо $m(k) = \sum\limits_{s=1}^{n} m_s(k), \qquad d(k) = \sum\limits_{s=1}^{n} d_s(k).$

1. Валеев К., Карелова О., Горелов В. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М., 1996; 2. Тихонов В., Миронов М. Марковские процессы. – М., 1997.

Надійшла до редколегії 3.12.2005